ISSN-e: 2737-6419 Revista Athenea
Período: octubre-diciembre de 2026 Vol.7, Número 26, (pp. 40–49)

Artículo de investigación https://doi.org/10.47460/athenea.v7i26.156

Sincronización y transferencia de energía en osciladores acoplados: influencia del acoplamiento, amortiguamiento y frecuencia

Luis Brayan Mera Landeta*
https://orcid.org/0009-0005-5078-5453
luis.mera@espoch.edu.ec
Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
Riobamba, Ecuador

Erick Patricio Meneses Casquete
https://orcid.org/0009-0005-6065-0616
erick.meneses@espoch.edu.ec
Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
Riobamba, Ecuador

Iraida Maritza Gavilanez Alvarez
https://orcid.org/0000-0002-8751-6653
iraida.gavilanez@unach.edu.ec
Universidad Nacional de Chimborazo
Riobamba, Ecuador

Miguel Angel Chasi Amangandi
https://orcid.org/0009-0009-4184-9581
miguel.chasi@ueb.edu.ec
Universidad Estatal de Bolívar
Guaranda, Ecuador

Autor de correspondencia: luis.mera@espoch.edu.ec

Recibido: (07/07/2026), Aceptado: (19/10/2026)

Resumen. Los osciladores acoplados permiten estudiar cómo la interacción y la disipación modifican la dinámica colectiva y la redistribución de energía. Este trabajo analiza conjuntamente la sincronización y la transferencia energética en dos osciladores lineales amortiguados con frecuencias naturales próximas. Se formuló un modelo adimensional y se realizó un barrido paramétrico del acoplamiento, el amortiguamiento y el desajuste de frecuencia, con validación frente a límites analíticos y una solución numérica independiente. Los resultados muestran que el acoplamiento y la proximidad resonante favorecen la transferencia, mientras que el amortiguamiento la limita. Sin embargo, una elevada coherencia de fase no implica necesariamente una transferencia energética eficiente. La separación entre ambos comportamientos evidencia la necesidad de caracterizar los sistemas acoplados mediante indicadores complementarios y ofrece una base reproducible para extender el análisis a sistemas eléctricos, no lineales y vibracionales.

Palabras clave: osciladores acoplados, sincronización, transferencia de energía, resonancia.

Synchronization and Energy Transfer in Coupled Oscillators: Influence of Coupling, Damping, and Frequency

Abstract. Coupled oscillators provide a simple framework for examining how interaction and dissipation modify collective dynamics and energy redistribution. This work jointly analyzes synchronization and energy transfer in two damped linear oscillators with close natural frequencies. A dimensionless model was formulated and a parametric sweep of coupling, damping, and frequency detuning was performed, including validation against analytical limits and an independent numerical solution. The results show that stronger coupling and near-resonant conditions favor energy transfer, whereas damping limits it. Nevertheless, high phase coherence does not necessarily imply efficient energy transfer. The separation between these behaviors shows that coupled systems should be characterized using complementary indicators and provides a reproducible basis for extensions to electrical, nonlinear, and vibrational systems.

Keywords: coupled oscillators, synchronization, energy transfer, resonance.

I. INTRODUCCIÓN

Los sistemas oscilatorios acoplados constituyen modelos fundamentales para describir la interacción entre subsistemas capaces de intercambiar energía. Su estudio aparece en mecánica, vibraciones estructurales, circuitos eléctricos, resonadores y redes dinámicas, donde el comportamiento colectivo depende tanto de las propiedades individuales como de la intensidad y naturaleza del acoplamiento [1]. Entre los fenómenos asociados se encuentran los modos normales, los batidos, la transferencia energética y diferentes formas de sincronización.

La sincronización no representa un único estado dinámico. Puede referirse a bloqueo de fase, coincidencia de frecuencias o convergencia hacia trayectorias colectivas, por lo que su interpretación debe vincularse con un indicador explícito [1], [2]. En osciladores con frecuencias ligeramente diferentes, la interacción puede aumentar la coherencia dinámica, aunque la respuesta depende del desajuste, del mecanismo de acoplamiento y de las pérdidas. Trabajos recientes con osciladores armónicos han mostrado que la combinación de heterogeneidad frecuencial y disipación determina la aparición y estabilidad de estados coordinados [3].

La transferencia de energía introduce una dimensión complementaria. En dos osciladores, la energía inicialmente localizada en uno de ellos puede redistribuirse hacia el otro mediante el elemento de acoplamiento. En resonancia, la relación entre acoplamiento y amortiguamiento determina si el sistema presenta intercambios periódicos o una transferencia fuertemente atenuada [4]. En sistemas casi idénticos y no lineales, pequeñas diferencias entre subsistemas también modifican el flujo de energía y la respuesta resonante [5].

Aunque sincronización y transferencia energética comparten una causa común, la interacción entre subsistemas, no son conceptos equivalentes. Diferentes formas de sincronización pueden coexistir con patrones energéticos distintos, como también se ha señalado para sistemas Hamiltonianos y disipativos [6]. Por ello, resulta pertinente evaluar ambos fenómenos dentro de un mismo espacio paramétrico y establecer si las condiciones que favorecen una elevada coherencia de fase coinciden con las que maximizan la transferencia energética.

El mismo formalismo posee conexiones interdisciplinarias. En ingeniería eléctrica, los osciladores mecánicos presentan análogos en redes resonantes pasivas y circuitos acoplados [7]. De manera complementaria, los modos acoplados constituyen una representación simplificada de procesos de redistribución de energía vibracional de interés fisicoquímico; sin embargo, los sistemas moleculares reales pueden incluir anharmonicidad y efectos cuánticos que exceden un modelo clásico lineal [8].

El objetivo de este trabajo fue analizar la influencia del acoplamiento, el amortiguamiento y el desajuste de frecuencias naturales sobre la sincronización y la transferencia de energía entre dos osciladores acoplados mediante modelización matemática y simulación numérica. A continuación, se presentan los fundamentos físicos y matemáticos del modelo, el procedimiento de análisis, los resultados con su discusión integrada y las conclusiones derivadas del estudio.

II. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

A. Dinámica de dos osciladores acoplados

Se consideran dos osciladores lineales de masas m_1 y m_2, constantes elásticas k_1 y k_2 y coeficientes de amortiguamiento viscoso c_1 y c_2, conectados mediante un elemento elástico de constante k_c. Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ representan los desplazamientos respecto de las posiciones de equilibrio, las ecuaciones de movimiento son:

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + k_c(x_1 - x_2) = 0 \tag{1}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 + k_c(x_2 - x_1) = 0 \tag{2}$$

Las frecuencias naturales de los osciladores aislados y el desajuste relativo empleado en el análisis se expresan como:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \tag{3}$$

$$\delta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \tag{4}$$

El signo de δ permite distinguir si la frecuencia natural del segundo oscilador es inferior o superior a la del primero. La condición $\delta = 0$ corresponde a resonancia entre los osciladores aislados.

B. Modos normales y transferencia de energía

Para masas y resortes principales idénticos y en ausencia de amortiguamiento, el sistema presenta un modo simétrico y otro antisimétrico. Sus frecuencias permiten visualizar el efecto del acoplamiento sobre la respuesta colectiva:

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_a = \sqrt{\frac{k + 2k_c}{m}} \tag{5}$$

La energía mecánica total incluye las contribuciones cinéticas, elásticas individuales y la energía almacenada en el elemento de acoplamiento:

$$\begin{aligned} E = &\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \\ &+ \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k_c(x_1 - x_2)^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Para cuantificar la redistribución, la energía del elemento de acoplamiento se repartió simétricamente entre ambos subsistemas. Así, las energías asignadas a cada oscilador fueron:

$$E_1 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{4}k_c(x_1 - x_2)^2 \tag{7}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{4}k_c(x_1 - x_2)^2 \tag{8}$$

La fracción máxima recibida por el segundo oscilador se utilizó como indicador principal de transferencia energética:

$$\eta_{\max} = \max_t \left[\frac{E_2(t)}{E(0)}\right] \tag{9}$$

C. Coherencia de fase

La sincronización se evaluó como coherencia de fase y no como igualdad instantánea de desplazamientos. Para señales armónicas amortiguadas, la fase se estimó a partir del ángulo del espacio de estados, con $\varphi_1 = \operatorname{atan2}(q_1, q_1')$ y $\varphi_2 = \operatorname{atan2}(rq_2, q_2')$, donde $r = \omega_2/\omega_1$. El grado de concentración de la diferencia de fase se cuantificó mediante:

$$R = \left|\frac{1}{N}\sum \exp\left[i(\varphi_1 - \varphi_2)\right]\right| \tag{10}$$

El índice R toma valores entre cero y uno; valores mayores representan una diferencia de fase más concentrada. Su uso como variable continua evita depender de un umbral único para clasificar el sistema como sincronizado. Esta precaución es pertinente porque distintas nociones de sincronización pueden describir comportamientos colectivos diferentes [1], [2], [6].

III. METODOLOGÍA

A. Formulación adimensional y barrido paramétrico

El estudio se desarrolló mediante simulación determinista de dos osciladores de igual masa y amortiguamiento, con frecuencias naturales próximas. Para eliminar la dependencia de unidades particulares se definieron $\tau = \omega_1 t$, $q_i = x_i/x_0$, $\kappa = k_c/k_1$, $r = \omega_2/\omega_1$ y $\zeta = c/(2m\omega_1)$. El sistema adimensional utilizado fue:

$$q_1'' + 2\zeta q_1' + (1+\kappa)q_1 - \kappa q_2 = 0 \tag{11}$$

$$q_2'' + 2\zeta q_2' + (r^2+\kappa)q_2 - \kappa q_1 = 0 \tag{12}$$

La energía inicial se concentró en el primer oscilador mediante las condiciones:

$$q_1(0) = q_2(0) = 0, \qquad q_1'(0) = 1, \qquad q_2'(0) = 0 \tag{13}$$

Estas condiciones concentran la energía inicial en el primer oscilador, mantienen al segundo inicialmente en reposo y evitan energía elástica inicial en el acoplamiento, de modo que el aumento posterior de E_2 puede atribuirse al intercambio mediado por la interacción.

Se efectuó un diseño factorial completo con κ entre 0,00 y 0,40 en incrementos de 0,02; ζ entre 0,00 y 0,10 en incrementos de 0,01; y δ entre $-0,20$ y 0,20 en incrementos de 0,02. Esto produjo 4 851 configuraciones. Los intervalos se seleccionaron para cubrir desde el desacoplamiento hasta una interacción con separación modal apreciable ($0 \le \kappa \le 0{,}40$), mantener una respuesta claramente subamortiguada ($0 \le \zeta \le 0{,}10$) y explorar desajustes de hasta $\pm 20\,\%$ alrededor de la resonancia ($-0{,}20 \le \delta \le 0{,}20$). La Tabla 1 resume los parámetros empleados para mantener trazabilidad entre el modelo, las simulaciones y las figuras posteriores.

Tabla 1. Variables y rangos del barrido paramétrico

Parámetro	**Intervalo e incremento**	**Función en el análisis**
Acoplamiento normalizado, κ	0,00–0,40 (0,02)	Intensidad de interacción
Razón de amortiguamiento, ζ	0,00–0,10 (0,01)	Pérdida disipativa
Desajuste relativo, δ	$-0,20$–0,20 (0,02)	Separación entre frecuencias
Tiempo adimensional, τ	0–250 (0,02)	Malla de salida temporal

B. Solución, validación e indicadores

Debido a que el sistema es lineal con coeficientes constantes y amortiguamiento común, cada configuración se resolvió mediante diagonalización modal de la matriz de rigidez y evolución temporal cerrada de los modos amortiguados. La salida se evaluó en una malla uniforme $\Delta\tau = 0{,}02$ hasta $\tau = 250$. Como control independiente, 27 configuraciones que combinaron valores bajos, intermedios y extremos de κ, ζ y δ se resolvieron con DOP853 de SciPy [9], utilizando una tolerancia relativa de 10^{-9} y absoluta de 10^{-11}. La diferencia máxima obtenida en $\eta_{\max}$ respecto de la solución modal fue $3{,}1 \times 10^{-9}$.

La consistencia física se verificó mediante tres límites: ausencia de transferencia para $\kappa = 0$; conservación de energía para $\zeta = 0$ dentro de la precisión de máquina; y coincidencia de las frecuencias modales numéricas con las expresiones analíticas del sistema idéntico. Estas comprobaciones permiten separar tendencias físicas de posibles artefactos numéricos.

Además de $\eta_{\max}$ se calculó el primer tiempo en que E_2 alcanzó el 95 % de su máximo, utilizado solo como indicador secundario para evitar seleccionar máximos tardíos equivalentes en sistemas sin amortiguamiento:

$$\tau_{95} = \min\{\tau : E_2(\tau) \ge 0{,}95 \cdot \max[E_2]\} \tag{14}$$

El índice R se calculó mientras la energía total superó el 1 % de su valor inicial y ambas amplitudes permanecieron por encima del 2,5 % de sus máximos. Estos umbrales operativos se utilizaron para excluir el régimen terminal de señal casi nula, en el que la fase pierde estabilidad numérica, conservando el intervalo dinámicamente informativo; no representan umbrales universales de sincronización. No se aplicaron pruebas de significación a las configuraciones simuladas, porque el barrido constituye un conjunto determinista y no una muestra aleatoria. La correlación de Spearman entre R y $\eta_{\max}$ se utilizó únicamente como descriptor monotónico del espacio paramétrico, sin interpretación inferencial, poblacional ni causal.

IV. RESULTADOS

A. Validación y evolución energética

Las pruebas de control reprodujeron los límites físicos esperados. Con $\kappa = 0$, la energía inicial permaneció en el primer oscilador; con $\zeta = 0$, la energía total se conservó dentro de la precisión numérica; y las frecuencias modales coincidieron con las soluciones analíticas. La comparación independiente con DOP853 confirmó que las tendencias del barrido no dependen del procedimiento de solución. Como ejemplo, para $\kappa = 0{,}22$, $\zeta = 0$ y $\delta = 0$, las frecuencias modales analíticas fueron $\omega_s = 1{,}000$ y $\omega_a = 1{,}200$, valores reproducidos por la diagonalización numérica dentro de la precisión de máquina.

En condiciones resonantes, la energía inicialmente concentrada en el primer oscilador se transfirió progresivamente al segundo. La Fig. 1 presenta un caso representativo con $\kappa = 0{,}22$, $\zeta = 0{,}02$ y $\delta = 0$. La energía total disminuye por disipación, mientras que las contribuciones individuales evidencian el intercambio entre subsistemas. Este comportamiento concuerda con la competencia entre acoplamiento y amortiguamiento descrita para pares de osciladores armónicos [5], así como con los regímenes de intercambio energético identificados en osciladores mecánicos lineales acoplados y amortiguados [10].

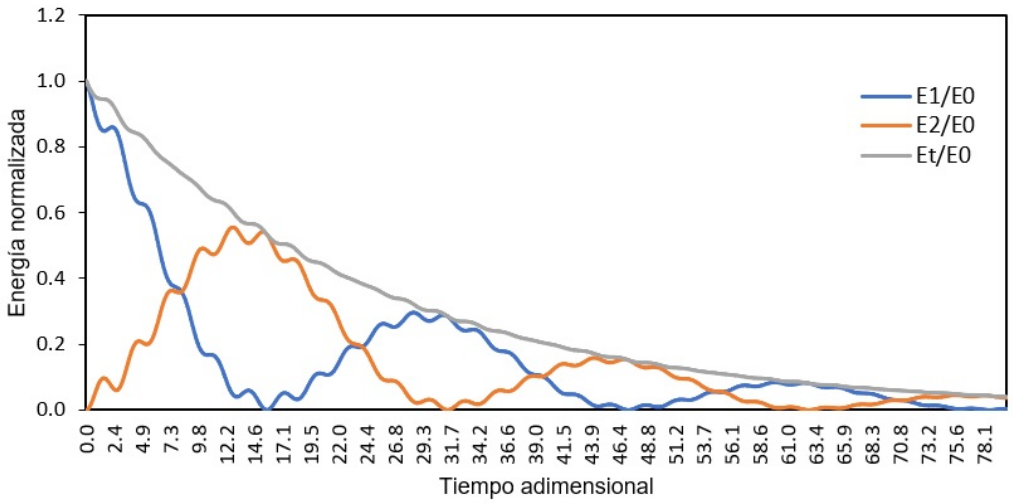


Fig. 1. Evolución de la energía normalizada de los osciladores y del sistema para $\kappa = 0{,}22$, $\zeta = 0{,}02$ y $\delta = 0$.

B. Acoplamiento, amortiguamiento y desajuste de frecuencia

El incremento del acoplamiento favoreció de forma sistemática la transferencia. Los valores medios que se presentan a continuación corresponden, para cada valor fijo del parámetro analizado, al conjunto de combinaciones restantes del barrido paramétrico. Así, $\eta_{\max}$ media aumentó de 0,0249 para $\kappa = 0{,}02$ a 0,4755 para $\kappa = 0{,}40$. El amortiguamiento produjo el efecto opuesto: la transferencia media disminuyó de 0,6680 para $\zeta = 0$ a 0,1037 para $\zeta = 0{,}10$. Por tanto, una interacción más intensa amplía la redistribución energética, pero las pérdidas reducen la cantidad disponible y el intervalo efectivo de intercambio.

Para facilitar la visualización, las Figuras 2 y 3 presentan niveles representativos de los parámetros; los análisis cuantitativos se realizaron sobre el barrido paramétrico completo. La Fig. 2 muestra la variación de la fracción máxima de energía transferida con el acoplamiento para distintos niveles

representativos de amortiguamiento en condición resonante. Las curvas evidencian que el incremento de κ favorece la transferencia energética, mientras que el aumento de ζ reduce progresivamente su magnitud. Los mayores valores se obtienen para acoplamientos elevados y pérdidas reducidas. Este comportamiento también es consistente con estudios de transferencia resonante en sistemas de dos osciladores acoplados, donde la proximidad a trayectorias de intercambio intenso favorece batidos y transferencia energética elevada, mientras que la disipación atenúa progresivamente el proceso [11]. La tendencia es consistente con la transición entre intercambio periódico y transferencia disipativa observada en sistemas acoplados [4].

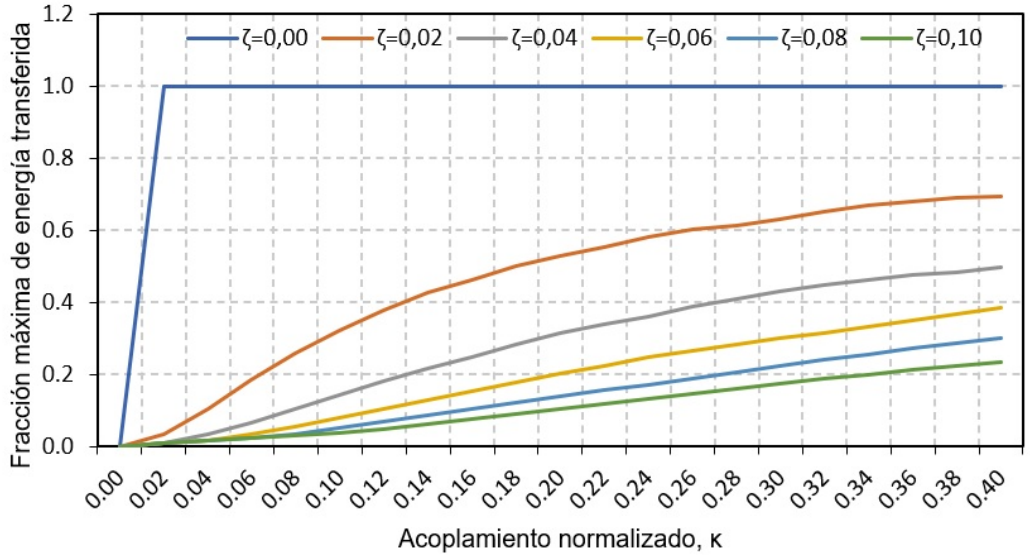


Fig. 2. Fracción máxima de energía transferida según el acoplamiento para diferentes niveles de amortiguamiento en resonancia.

La proximidad de las frecuencias naturales también fue determinante. La transferencia media alcanzó 0,3282 en $\delta = 0$ y disminuyó a 0,2403 para $\delta = -0{,}20$ y a 0,1987 para $\delta = 0{,}20$. La Fig. 3 muestra la variación de la transferencia energética con el acoplamiento para distintos niveles representativos de desajuste de frecuencia, manteniendo $\zeta = 0{,}03$. La curva correspondiente a $\delta = 0$ presenta, en general, los mayores valores de transferencia, mientras que el alejamiento de la condición resonante reduce progresivamente el intercambio energético. La relevancia de la condición resonante para el transporte energético también se ha observado en arreglos con mayor número de osciladores, donde una transferencia sustancial requiere una adecuada sintonización entre los modos participantes [12]. En todos los casos, la transferencia aumenta con κ, aunque la magnitud alcanzada depende del desajuste entre las frecuencias naturales. La ligera asimetría respecto de $\delta = 0$ deriva de la condición inicial asimétrica: la energía se deposita exclusivamente en el oscilador 1, por lo que cambiar el signo de δ modifica si el oscilador receptor posee una frecuencia natural mayor o menor que la fuente. Como la transformación $\delta \to -\delta$ no intercambia simultáneamente los osciladores ni la excitación inicial, ambas situaciones no son dinámicamente equivalentes y pueden producir valores distintos de $\eta_{\max}$. Esta sensibilidad frente a pequeñas diferencias dinámicas también se observa en sistemas casi idénticos más complejos [5].

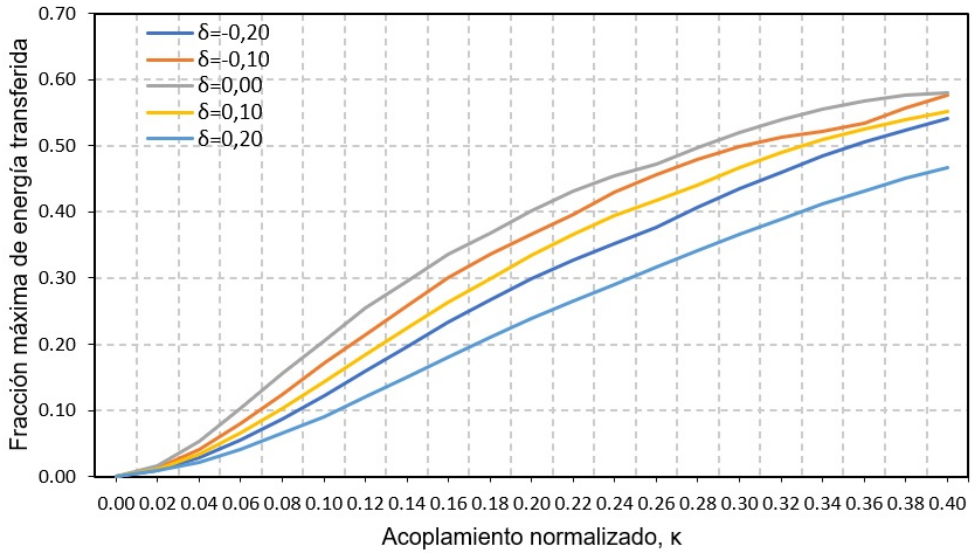


Fig. 3. Fracción máxima de energía transferida según el acoplamiento para diferentes niveles de desajuste de frecuencia con $\zeta = 0{,}03$.

C. Coherencia de fase y transferencia energética

La coherencia de fase respondió de manera diferente a la transferencia. Para las configuraciones con fase válida, R medio disminuyó de 0,7778 en $\kappa = 0{,}02$ a 0,3617 en $\kappa = 0{,}40$; en cambio, aumentó de 0,4341 para $\zeta = 0$ a 0,6046 para $\zeta = 0{,}10$. Un acoplamiento fuerte próximo a resonancia favorece batidos e intercambio periódico de energía, durante los cuales la diferencia de fase puede evolucionar de forma apreciable. En sistemas más disipativos, el predominio de una respuesta residual puede producir relaciones de fase más concentradas aunque la energía transferida sea pequeña. Por ello, una mayor interacción no implica automáticamente un mayor bloqueo de fase [1], [2], [3]. Esta dependencia de la sincronización respecto de la intensidad de interacción, la distribución de frecuencias y el régimen dinámico constituye una característica general de los sistemas de osciladores acoplados [13]. Asimismo, sistemas mecánicos acoplados pueden desarrollar estados sincronizados en fase o antifase dependiendo de sus condiciones de interacción [14].

La Fig. 4 integra ambas respuestas. En 4 620 configuraciones acopladas con estimación válida de fase, la asociación descriptiva entre R y $\eta_{\max}$ fue negativa ($\rho_s = -0{,}655$), lo que indica una tendencia monotónica inversa dentro del dominio simulado y no una relación poblacional o causal. Las transferencias más intensas aparecen principalmente con coherencia baja o intermedia, mientras que numerosos valores de R próximos a uno corresponden a intercambios pequeños. Este resultado indica que coherencia de fase y eficiencia de transferencia son propiedades dinámicas diferentes y deben evaluarse con indicadores independientes.

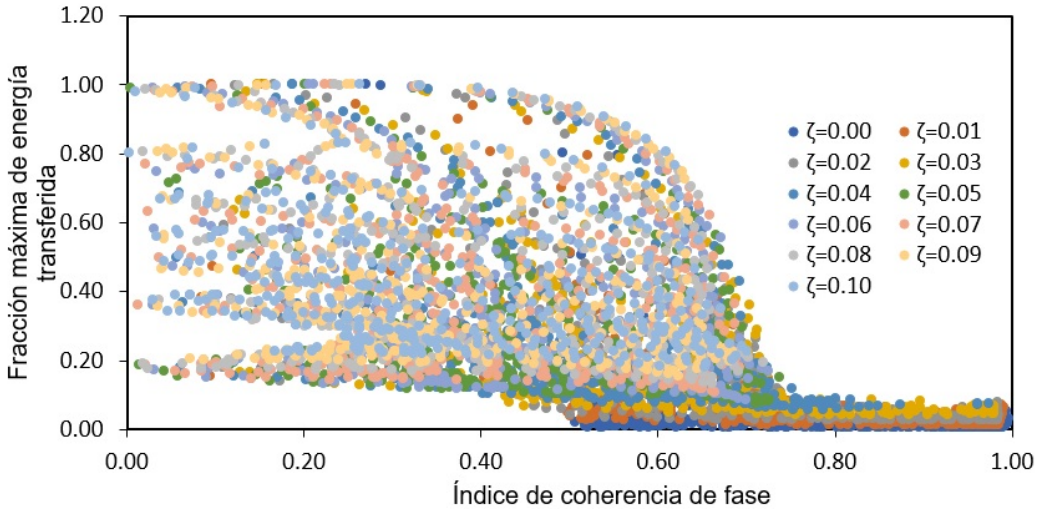


Fig. 4. Relación entre coherencia de fase y fracción máxima de energía transferida para las configuraciones acopladas según el amortiguamiento.

La Tabla 2 resume configuraciones que ilustran la separación entre ambos fenómenos. El caso resonante sin amortiguamiento puede transferir prácticamente toda la energía inicial con una coherencia relativamente baja, mientras que una configuración débilmente acoplada y fuertemente amortiguada alcanza una coherencia elevada con transferencia mínima.

Tabla 2. Regímenes representativos de transferencia energética y coherencia de fase

κ	ζ	δ	$\eta_{\max}$	R	**Régimen observado**
0,22	0,00	0,00	1,000	0,201	Transferencia casi completa
0,40	0,05	0,00	0,435	0,329	Transferencia intermedia
0,40	0,01	0,14	0,734	0,569	Transferencia elevada
0,04	0,09	0,04	0,015	0,984	Coherencia elevada; transferencia mínima

La distinción principal del estudio es, por tanto, que máxima transferencia energética y máxima coherencia de fase no ocupan necesariamente las mismas regiones paramétricas. Esta observación resulta compatible con la diversidad de nociones de sincronización descritas en la literatura [2], [6]. La analogía con sistemas eléctricos es directa en términos de resonancia y acoplamiento [7]; en fisicoquímica, la redistribución entre modos vibracionales ofrece una conexión conceptual, aunque la resonancia de Fermi y la dinámica molecular real incluyen no linealidad y efectos adicionales [8].

D. Alcance y limitaciones

Los resultados corresponden a un modelo lineal, pasivo, de dos osciladores con amortiguamiento común y condiciones iniciales controladas. No representan mediciones de un dispositivo particular ni permiten extrapolar directamente los valores obtenidos a sistemas moleculares, circuitos específicos o redes extensas. La principal utilidad del barrido es identificar relaciones paramétricas reproducibles dentro del modelo. Extensiones con forzamiento externo, no linealidad, acoplamientos disipativos o múltiples osciladores podrían alterar las regiones de coherencia y transferencia [3], [15]. En particular, la incorporación de elementos esencialmente no lineales puede producir captura resonante y transferencia energética dirigida, fenómenos que no están representados en el modelo lineal considerado aquí [16].

CONCLUSIONES

El análisis conjunto del acoplamiento, el amortiguamiento y el desajuste de frecuencias confirmó que sincronización y transferencia energética son respuestas relacionadas, pero no equivalentes. En el barrido, $\eta_{\max}$ media aumentó de 0,0249 a 0,4755 al variar κ de 0,02 a 0,40, mientras que la asociación entre coherencia y transferencia fue inversa ($\rho_s = -0{,}655$). Estos resultados muestran cuantitativamente que una mayor transferencia energética no implica necesariamente una mayor coherencia de fase.

La separación entre ambos comportamientos muestra que el estado dinámico de un sistema acoplado no debe caracterizarse mediante un único indicador. Evaluar de forma complementaria la energía y la fase permite distinguir regímenes que quedarían ocultos si se asumiera que una mayor sincronización implica necesariamente una transferencia más eficiente.

El modelo adimensional y el barrido paramétrico proporcionan una base reproducible independiente de un dispositivo experimental específico. La validación frente a límites analíticos y a una solución numérica independiente respalda la consistencia del procedimiento y facilita su extensión hacia circuitos resonantes, sistemas no lineales, acoplamientos disipativos y redes con más osciladores.

Como proyección, resulta pertinente evaluar si la separación identificada entre coherencia y transferencia se mantiene bajo excitación externa y no linealidad. La conexión complementaria con vibraciones moleculares también puede explorarse mediante modelos no lineales que representen de forma más realista la anharmonicidad de los enlaces moleculares, manteniendo la distinción entre la analogía clásica utilizada aquí y los procesos fisicoquímicos reales.

REFERENCIAS

[1] F. Dörfler and F. Bullo, "Synchronization in complex networks of phase oscillators: A survey," *Automatica*, vol. 50, no. 6, pp. 1539–1564, Jun 2014.

[2] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, "Phase synchronization in regular and chaotic systems," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 10, no. 10, pp. 2291–2305, 2000.

[3] J. N. Moreno, C. W. Wächtler, and A. Eisfeld, "Synchronized states in a ring of dissipatively coupled harmonic oscillators," *Physical Review E*, vol. 109, no. 1, p. 014308, Jan 2024.

[4] G. Dolfo *et al.*, "Damping of coupled harmonic oscillators," *European Journal of Physics*, vol. 39, no. 2, p. 025005, Mar 2018.

[5] K. Shao, Z. Yao, B. Shi, Y. Liu, and J. Yang, "Vibration energy transfer in nonlinear coupled near-identical systems," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 234, p. 112786, Jul 2025.

[6] A. Ghosh, "Measure synchronization in interacting Hamiltonian systems: A brief review," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 177, p. 114237, Dec 2023.

[7] S. E. Tuna, "Synchronization of harmonic oscillators under restorative coupling with applications in electrical networks," *Automatica*, vol. 75, pp. 236–243, Jan 2017.

[8] S. Tanaka and Y. Okiyama, "Energy transfer and non-equipartition in nonlinearly coupled oscillators with Fermi resonance," *Chemical Physics Letters*, vol. 864, p. 141889, Apr 2025.

[9] P. Virtanen *et al.*, "SciPy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in Python," *Nature Methods*, vol. 17, no. 3, pp. 261–272, Feb 2020.

[10] D. H. Zanette, "Energy exchange between coupled mechanical oscillators: Linear regimes," *Journal of Physics Communications*, vol. 2, no. 9, p. 095015, Sep 2018.

[11] L. I. Manevitch, A. S. Kovaleva, and E. L. Manevitch, "Limiting phase trajectories and resonance energy transfer in a system of two coupled oscillators," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2010, no. 1, p. 760479, Jan 2010.

[12] A. Kovaleva and L. I. Manevitch, "Resonance energy transport and exchange in oscillator arrays," *Physical Review E*, vol. 88, no. 2, p. 022904, Aug 2013.

[13] J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. P. Vicente, F. Ritort, and R. Spigler, "The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena," *Reviews of Modern Physics*, vol. 77, no. 1, p. 137, Apr 2005.

[14] K. Li *et al.*, "Heat-driven synchronization in coupled liquid crystal elastomer spring self-oscillators," *Polymers*, vol. 15, no. 16, p. 3349, Aug 2023.

[15] L. Galano, P. M. Mariano, and M. Spadini, "Coupled nonlinear oscillators: Dynamics with a period matching the forcing one," *Nonlinear Dynamics*, vol. 113, pp. 32 219–32 236, 2025.

[16] G. Kerschen, Y. S. Lee, A. F. Vakakis, D. M. Mcfarland, and L. A. Bergman, "Irreversible passive energy transfer in coupled oscillators with essential nonlinearity," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 66, no. 2, pp. 648–679, 2006.